Grundlagen der Stochastik

Mario Mohr

GWV-Tutorium 2013/14

10. Januar 2014

Zufallsexperiment

Ein **Zufallsexperiment**

- ist ein Experiment, dessen Ergebnis vom Zufall abhängt
- besitzt einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Sigma}, \boldsymbol{P})$:
  - die Ergebnismenge $\mathbf{\Omega}$,
  - die σ-Algebra $\mathbf{\Sigma}$ und
  - das Wahrscheinlichkeitsmaß $\boldsymbol{P}$

Ergebnismenge Ω

Die **Ergebnismenge Ω**

- enthält alle möglichen Ausgänge des jeweiligen Experimentes
- kann aus einfachen oder komplexen, zusammengesetzen Elementen bestehen:
  - *Einfacher Würfelwurf:*
    $\Omega_{1W} = \{1, .., 6\}$
  - *Zwei Würfel und eine Münze:*
    $\Omega_{2W1M} = \{1, .., 6\} \times \{1, .., 6\} \times \{Kopf, Zahl\}$
    $= \{(1, 1, Kopf), (1, 1, Zahl), (1, 2, Kopf), ..., (6, 6, Zahl)\}$

σ-Algebra Σ

DIe **$\boldsymbol{\sigma}$-Algebra $\boldsymbol{\Sigma}$** ('Ereignismenge')

- ist Teilmenge der Potenzmenge von Ω *($\Sigma \subseteq 2^{\Omega}$)*
  $\Sigma_{1W} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, ..., \{1, 2\}, \{1, 3\}, ...\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
- gibt alle möglichen Ereignisse (!= Ergebnisse), also Beobachtungen über das jeweilige Experiment an
  'Der Würfel zeigt eine zwei': $A_{1W\_zwei} = \{2\}$
  'Der Würfel zeigt eine gerade Zahl': $A_{1W\_gerade} = \{2, 4, 6\}$
  'Die beiden Würfel zeigen dieselbe Zahl und die Münze zeigt Kopf':
  $A_{2W1M\_pasch\_kopf} =$
  $\{(1, 1, Kopf), (2, 2, Kopf), ..., (6, 6, Kopf)\}$

Wahrscheinlichkeitsmaß P - I

Das **Wahrscheinlichkeitsmaß** P

- weist jedem Ergebnis des jeweiligen Experiments eine Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 zu,
- ist also eine Funktion $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$
  'Die Wahrscheinlichkeit, dass das Würfelergebnis eine zwei ist, ist:' $P_{1W}(2) = \frac{1}{6}$
  'Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Würfel eine sechs zeigen und die Münze Zahl zeigt, ist: ' $P_{2W1M}((6, 6, Zahl)) = \frac{1}{72}$

Wahrscheinlichkeitsmaß P - II

Das Wahrscheinlichkeitsmaß eines Experimentes ist σ-additiv! D.h. die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (also einer Beobachtung) ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der in ihr enthaltenen Ergebnisse.

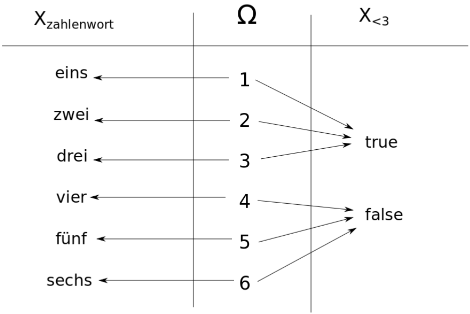
'Wie wahrscheinlich ist es, eine gerade Zahl zu würfeln?'
(Zur Erinnerung: $A_{1W\_gerade} = \{2,4,6\}$)

$$P(A_{1W\_gerade}) = P(\{2,4,6\}) = P(2)+P(4)+P(6) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Stochastische Variablen - I

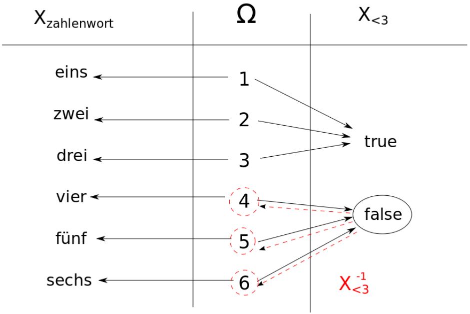
Eine **Stochastische Variable**

- bildet die Ergebnisse eines Experimentes auf eine Menge von Interpretationen ab,
- ist also eine Funktion $X : \Omega \to dom(X)$



Stochastische Variablen - II

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A einer Variablen X ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse (aus Ω), die von X auf A abgebildet werden: $P^X(A) = P(X^{-1}(A))$

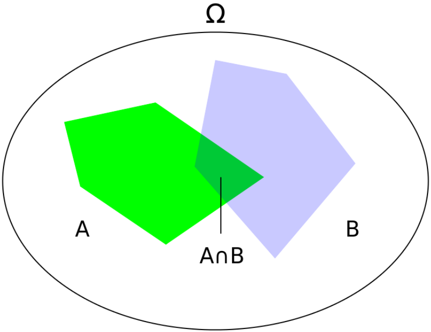


$$
\begin{aligned}
&P^{X_{<3}}_{1W}(\{\mathit{false}\}) \\
&= P_{1W}(X^{-1}_{<3}(\{\mathit{false}\})) \\
&= P_{1W}(\{4,5,6\}) \\
&= P_{1W}(4) + P_{1W}(5) + P_{1W}(6) \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P(B|A)$

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit** $P(B|A)$

- ist die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens des Ereignisses B unter der Beobachtung des Ereignisses A
- ist $\frac{P(B \cap A)}{(A)}$



'Wie wahrscheinlich ist ein Würfelergebnis von einer zwei, wenn wir wissen, dass wir eine Zahl kleiner oder gleich drei gewürfelt haben?'

$$P(A_{gerade}|A_{kleinerdrei}) = \frac{P(A_{gerade} \cap A_{kleinerdrei})}{P(A_k leinerdrei)} = \frac{P(\{2\})}{P(\{1,2,3\})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$